
EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo

Un primer encuentro con la Hipótesis de Riemann y su comprobación numérica

por

Juan Arias de Reyna y Jan van de Lune

1. INTRODUCCIÓN

1.1. LOS ORÍGENES: DESDE EUCLIDES A EULER/CHEBYSHEV

Desde la antigüedad, los *números primos* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... han fascinado a la humanidad. Parece improbable que lleguemos a conocer los detalles de cómo el *homo sapiens* tomó conciencia de la noción de número primo, aunque sabemos que Pitágoras lo había hecho ya en el 550 a. C.

El libro IX de los Elementos de Euclides (300 a. C.) contiene algunos documentos escritos incluyendo varios teoremas sobre los números primos. En particular, su demostración (por contradicción) de la existencia de infinitos números primos se ha convertido en un clásico y se encuentra en los primeros capítulos de la mayoría de los libros elementales sobre teoría de números.¹ En términos de la notación moderna, que consiste en escribir $\pi(x)$ para denotar el número de primos menores o iguales que x , el teorema de Euclides se puede enunciar de la forma $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty$.

Alrededor del 240 a. C., Eratóstenes ideó un método simple pero ingenioso para *generar los primos* por medio de la *criba* que lleva su nombre, y que se basa en el siguiente principio: Si $n > 1$ y $p \nmid n$ para todo $p \leq \sqrt{n}$ entonces n es primo.

A veces este método se describe, en un tono algo despectivo, como útil sólo para rangos cortos. Sin embargo, después de *pre-calcular* todos los primos $\leq n$ en un bloque de criba de longitud n , podemos volver a usar este mismo bloque repetidamente, de manera que el rango de la criba se convierte en n^2 . Hoy en día, incluso con un ordenador personal puede uno fácilmente poner $n = 10\,000\,000$, de

¹También nos gusta especialmente la demostración combinatoria elemental de Pólya: $\sqrt{n} 2^{\pi(n)} \geq n$.

forma que el rango de la criba será 10^{14} . Esta criba extendida de Eratóstenes es a menudo muy útil en el estudio de funciones aritméticas *multiplicativas* relacionadas con los primos tales como la función de Möbius $\mu(n)$. Para más detalles ver [35].

Durante toda la historia conocida de la teoría de los números primos, han perdurado tres cuestiones:

- (1) cómo determinar si un número dado n es o no primo,
- (2) cómo encontrar los factores primos de n cuando se sabe que n es compuesto,
- (3) cuántos primos hay no superiores a un número real positivo x grande.

En la mayor parte del trabajo sobre los números primos, el Teorema Fundamental de la Aritmética juega un papel crucial:

Todo entero positivo mayor que 1 se escribe como producto de primos de manera única salvo por el orden de presentación de los factores.

Que esto no es simplemente una trivialidad puede verse en algunos ejemplos donde no ocurre: en el conjunto de los enteros *pares* tenemos $36 = 6 \times 6 = 2 \times 18$ y en el anillo $\{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ tenemos que $6 = 2 \times 3 = (1 - i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{5})$. Durante siglos los matemáticos parecen haber tenido conciencia del Teorema Fundamental de la Aritmética, pero fue Gauss el primero que lo enunció y demostró rigurosamente. Una formulación equivalente es la afirmación de que los logaritmos de los primos son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} .

Para más detalles sobre los orígenes de la teoría de los números primos recomendamos encarecidamente el libro de Narkiewicz [52] y la introducción del libro de Landau [38].

1.2. EL NUEVO ENFOQUE DE EULER A LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

No fue hasta el siglo XVIII cuando Euler presentó una nueva demostración del teorema de Euclides (ver [18, Theorem 19]). Euler considera la serie *armónica* real

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (\text{sólo convergente para } s > 1) \quad (1)$$

y comienza mostrando que su suma, hoy denotada por $\zeta(s)$, tiende a ∞ cuando $s \downarrow 1$.

La novedad de Euler consiste en conectar dicha suma que involucra a todos los números naturales con un producto sobre todos los primos:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (s > 1). \quad (2)$$

La idea básica de esta igualdad es bastante simple. Escribamos $(1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$ y multipliquemos en (2). El resultado será una suma infinita de fracciones de la forma $\frac{1}{(p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} \dots)^s}$. La demostración se concluye observando que todos los números naturales mayores que 1 se pueden escribir como producto de potencias

de primos (y de manera única como consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética). Es por esto que la igualdad (2) es a menudo llamada el análogo analítico de este teorema. Euler razona entonces como sigue: Si sólo hubiera un número finito de primos, entonces el límite del producto cuando $s \downarrow 1$, y por tanto el de (1), sería claramente finito. Esta contradicción prueba que debe haber infinitos primos.

Pero esta nueva demostración ofrece mucho más. Si tomamos logaritmos en (2), utilizando el desarrollo de Taylor de $\log(1-x)$ es fácil ver que

$$\log\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_p \frac{1}{p^s} + R(s), \quad (3)$$

donde $R(s)$ es una función acotada uniformemente para $s \downarrow 1$. Tomando el límite cuando $s \downarrow 1$ se deduce que la suma de los inversos de los primos es divergente. Es decir, no sólo hay infinitos primos, sino que son lo suficientemente densos para que la suma de sus inversos diverja.

Después de Euler fue Chebyshev [11] quien dio el siguiente paso. Obtuvo el verdadero orden de $\pi(x)$ al probar, con métodos combinatorios, que

$$0.921\,29\dots \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1.105\,55\dots \quad (4)$$

También probó que si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ existe, entonces este límite debe ser igual a 1.

2. EL ENFOQUE DE RIEMANN A $\zeta(s)$ PARA s COMPLEJO

2.1. EL ARTÍCULO DE RIEMANN (3 DE NOVIEMBRE DE 1859)

En el único trabajo publicado por Riemann sobre Teoría de Números [65], su idea novedosa fue considerar $\zeta(s)$ como una función de variable compleja $s = \sigma + it$, extendiendo así el producto de Euler para valores complejos de s con $\operatorname{Re} s > 1$. Riemann denota por $\zeta(s)$ la función holomorfa así definida, y prueba que se extiende a una función meromorfa sobre \mathbb{C} con un único polo (simple) en el punto $s = 1$ con residuo 1. Para esta función meromorfa prueba a continuación la ecuación funcional

$$\text{si } f(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \text{ entonces } f(s) = f(1-s) \quad (5)$$

que (usando propiedades conocidas de $\Gamma(s)$) puede también escribirse como

$$\zeta(s) = \chi(s) \zeta(1-s) \quad \text{donde} \quad \chi(s) := 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s). \quad (6)$$

De esta fórmula se deduce inmediatamente que la función $\zeta(s)$ se anula en los pares negativos y en ningún otro sitio si $\operatorname{Re}(s) < 0$. Estos ceros se denominan ceros triviales de la función $\zeta(s)$.

Riemann da dos pruebas de la prolongación analítica y de la ecuación funcional. La segunda de ellas utiliza la ecuación funcional de una *función theta* (la función

$\psi(x)$ en (8), más abajo) y se ha convertido en un modelo de la relación existente entre funciones L más generales y las funciones modulares.

Riemann también introduce las funciones enteras $\xi(s)$ y $\Xi(t)$ mediante las ecuaciones²

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad \text{y} \quad \Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad (7)$$

y obtiene la expresión integral

$$\Xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}} \psi'(x))}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx \quad \text{donde} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}, \quad (8)$$

en la que claramente vemos que $\Xi(t)$ es real para t real.

Los ceros de la función $\xi(s)$ son exactamente los ceros de la función $\zeta(s)$ en $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, lo que se conoce como banda crítica. Por tanto estudiar los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ es equivalente a estudiar los ceros α de $\xi(s)$. La función $\Xi(s)$ consiste simplemente en un cambio de variable donde la banda crítica se transforma en la región $|\operatorname{Im}(s)| \leq \frac{1}{2}$.

Riemann afirma que el número de ceros α de $\Xi(s)$ con $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq T$ es $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ con un error acotado por $C \log T$, y da una idea muy esquemática de la demostración. Riemann continúa diciendo:

«Uno encuentra, de hecho, en torno a esta cantidad de raíces reales dentro de estos límites, y es muy probable que todas las raíces sean reales. Naturalmente uno quisiera tener una demostración rigurosa de esto, pero he dejado de lado la búsqueda de esta demostración después de algunos fugaces intentos vanos porque no es necesario para el objetivo inmediato de mi investigación.»

El fragmento «... y es muy probable que todas las raíces sean reales» se ha convertido en la famosa Hipótesis de Riemann (HR). La brevedad de este artículo sólo nos permite tratar una parte muy limitada de la abundante literatura sobre la Hipótesis de Riemann.

Riemann termina su estudio de los ceros de $\Xi(t)$ dando una idea muy esquemática de la demostración de la fórmula producto

$$\Xi(t) = \Xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right), \quad (9)$$

donde el producto recorre todos los ceros α de $\Xi(t)$.

Establecidos estos elementos de la teoría de la función zeta retorna al objeto principal de su trabajo, que es obtener una fórmula para $\pi(x)$, el número de primos $\leq x$. Considera en su lugar la función $\pi_0(x)$ que es igual a $\pi(x)$ si x no es un número primo, mientras que $\pi_0(p) = \pi(p) - \frac{1}{2}$, y define $\Pi_0(x) = \sum_n \frac{1}{n} \pi_0(x^{1/n})$.

²Como actualmente es habitual, no seguimos aquí las notaciones de Riemann.

Entonces establece la fórmula explícita (donde $\text{Li}(x) = \int_0^x (\log u)^{-1} du$ es la función logaritmo integral)

$$\Pi_0(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\alpha} \{ \text{Li}(x^{\frac{1}{2} + \alpha i}) + \text{Li}(x^{\frac{1}{2} - \alpha i}) \} + \int_x^{\infty} \frac{1}{u^2 - 1} \frac{du}{u \log u} - \log 2. \quad (10)$$

La parte más delicada de la demostración, el intercambio de una suma y una integral, se trata simplemente diciendo que para justificarla sería necesario un estudio adicional de la función $\Xi(t)$.

También menciona que $\pi_0(x)$ puede ser recuperada por medio de la relación

$$\pi_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \Pi_0(x^{1/m}). \quad (11)$$

El trabajo termina con algunos comentarios sobre la posible influencia de los términos «oscilatorios» en la fórmula (10) sobre la densidad de los números primos.

2.2. LA CARTA DE RIEMANN A WEIERSTRASS (26 DE OCTUBRE DE 1859)

En el Legado de Riemann, conservado en la biblioteca de la Universidad de Göttingen, se encuentra el borrador de una carta de Riemann a Weierstrass que explica muchas cosas sobre el trabajo publicado de Riemann. El 11 de agosto de 1859, Riemann fue elegido miembro correspondiente de la Academia de Berlín. Debido a esto Riemann, acompañado por Dedekind, hizo un viaje a Berlín en septiembre de 1859. En Berlín, Riemann se encontró con Weierstrass, Kronecker, Kummer, Borchardt, ... El trabajo de Riemann [65] es su primera comunicación a la Academia de Berlín. Era natural que fuera publicada en la revista mensual de la Academia, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, de la cual Weierstrass era editor. La longitud de una comunicación en el *Monatsberichte* era usualmente de dos o tres páginas. El 3 de noviembre de 1859 Kummer leyó la comunicación de Riemann en la Academia de Berlín. Presentamos un breve resumen de lo que Riemann escribió a Weierstrass.

En primer lugar escribe que todavía no ha acabado su trabajo sobre la frecuencia de los primos, y que sólo por la insistencia de Kronecker envía este breve ensayo a la Academia.

Si, a pesar de sus esfuerzos por ser breve, el ensayo no es considerado suficientemente corto para una comunicación a la Academia, espera que a pesar de todo sea aceptado.

Riemann parece estar preocupado por la longitud de su artículo. Por consiguiente, las demostraciones no se dan con el detalle suficiente. En particular hay dos afirmaciones para las cuales no da ni siquiera una idea de la prueba. Riemann detalla exactamente a qué afirmaciones se está refiriendo. La primera de ellas, que por conveniencia denotaremos por (A), es especialmente interesante para nosotros:

(A) «que entre 0 y T hay aproximadamente $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ raíces reales de la ecuación $\Xi(\alpha) = 0$.»

Riemann también escribe: (i) que estas dos afirmaciones siguen de un desarrollo de la función $\Xi(t)$ que no ha simplificado suficientemente para poder comunicarlo; (ii) que, a pesar de esto, para todas las demás afirmaciones, para las cuales sí da una idea de la prueba, está seguro que Weierstrass podrá rellenar los huecos; y (iii) que quisiera que Weierstrass le hiciera saber si el ensayo aparecerá finalmente en el *Monatsberichte*, puesto que en otro caso él extendería el trabajo para que sea publicado por Weber en la revista de «nuestra sociedad matemática local». Aquí la carta continúa hablando sobre otro tema matemático diferente.

Intencionadamente o no, Riemann pudo haber sobreestimado la capacidad de sus colegas. Aparentemente, ni Weierstrass, ni ningún otro matemático del momento, parecieron haber entendido las ideas de las pruebas que Riemann proporciona para demostrar sus afirmaciones.

El trabajo de Riemann [65] fue publicado en 1859. Una generación más tarde, en Göttingen, sus sucesores Klein, Hilbert y Landau pensaban que el trabajo era brillante y fructífero, pero que Riemann no había probado casi nada, que todo eran razonamientos heurísticos. De acuerdo con Landau, Riemann había probado únicamente la ecuación funcional y había formulado seis conjeturas. Esto es bastante sorprendente puesto que la segunda edición de las Obras Completas, que habían sido publicadas por Weber en 1892, contenían un fragmento de la carta de Riemann a Weierstrass. Parece que ni Klein, ni Hilbert o Landau habían mirado el Legado de Riemann conservado en la biblioteca de Göttingen, a pesar de que el bibliotecario Distel había señalado que existía material relevante.

Sólo podemos imaginar cuánto mayor hubiera sido nuestra comprensión de las ideas de Riemann si él se hubiera sentido libre de usar unas pocas páginas más para comunicar sus pensamientos. (Recomendamos aquí la lectura de Neuenschwander [53] y Quer [64].)

Mientras que reconocemos el valor de la intervención de Kronecker, es obvio que los editores pudieron servir mejor a la comunidad matemática. Como Riemann escribe a Weierstrass [67], él no considera su trabajo sobre la densidad de los primos acabado. Sin embargo, cede ante el deseo de Kronecker y envía a Berlín el «breve ensayo» sobre el tema.

2.3. EL LEGADO Y SIEGEL

El primer matemático interesado en el Legado de Riemann fue Bessel-Hagen, quien encontró algunas fórmulas nuevas. El Legado está muy lejos de ser un manuscrito final y pulido, y Siegel fue el primer matemático capaz de extraer algo con sentido de él.

Siegel [73] dice que en el Legado de Riemann hay dos resultados sobre la función zeta no publicados previamente: (i) una fórmula encontrada por el bibliotecario Distel, que es un desarrollo asintótico de $\zeta(s)$ en cualquier banda $\sigma_1 \leq \text{Re } s \leq \sigma_2$ (el primer término de este desarrollo había sido encontrado también por Hardy y Littlewood (1920) en su «ecuación funcional aproximada»); y (ii) una expresión para la función zeta por medio de integrales encontrada por Bessel-Hagen.

Siegel escribe que no ha encontrado en el Legado ningún intento de probar ni la Hipótesis de Riemann, ni que haya un número infinito de ceros reales de $\Xi(t)$, y afirma que posiblemente Riemann ha llegado a su afirmación (A) a partir de su desarrollo asintótico (12) de $Z(t)$ por algún razonamiento heurístico.

El carácter desordenado de las notas de Riemann, dice Siegel, hacen necesario reformular los resultados de Riemann. Lamentamos que después de leer el trabajo de Siegel no quede enteramente claro qué parte es de Riemann y qué parte de Siegel.

Siegel habla sobre las ideas erróneas acerca de Riemann de los contemporáneos de Klein. También hace bastante explícito el hecho de que Riemann estaba en posesión de técnicas analíticas muy potentes. Siegel escribe la fórmula asintótica

$$Z(t) := e^{i\vartheta} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 2 \sum_{n=1}^m \frac{\cos(\vartheta - t \log n)}{\sqrt{n}} + (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4} R, \quad (12)$$

$$\vartheta = -\frac{t}{2} \log \pi + \arg \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right), \quad m = \left\lfloor \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right\rfloor, \quad (13)$$

$$R = C_0 + C_1 t^{-1/2} + C_2 t^{-1} + C_3 t^{-3/2} + \dots, \quad (14)$$

donde los coeficientes C_j tienen expresiones bastante complicadas.

Siegel afirma que Riemann usó esta fórmula para calcular algunos de los primeros ceros (al menos 3) de la función $\Xi(t)$.

La nueva fórmula integral publicada por Siegel podemos escribirla como

$$\zeta(s) = \mathcal{R}(s) + \chi(s) \overline{\mathcal{R}(1 - \bar{s})} \quad \text{donde} \quad \mathcal{R}(s) = \int_{0 \swarrow 1} \frac{x^{-s} e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} dx. \quad (15)$$

Aquí el camino de integración es una línea recta de pendiente 1 pasando por $x = 1/2$, y la función $\chi(s)$ es la misma que en la ecuación funcional. (Ésta no es la forma dada por Siegel, quien también se desvía de la notación de Riemann.)

Siegel termina su trabajo con un estudio de la función $\mathcal{R}(s)$ (una notación que hemos introducido aquí en honor de Riemann). Escribe que Riemann también consideró esta función y trató de estudiar sus ceros, su módulo $|\mathcal{R}(\frac{1}{2} + it)|$, y su argumento $\arg \mathcal{R}(\frac{1}{2} + it)$.

De su estudio de los ceros de $\mathcal{R}(s)$, Siegel obtiene el teorema de que hay al menos cT ceros reales de $\Xi(t)$ con $0 < t < T$, y concluye su artículo afirmando que los medios actuales (en 1932) no permiten obtener una prueba de la afirmación (A) de Riemann.

2.4. DESPUÉS DEL LEGADO

No tenemos razones para dudar de la sinceridad de Riemann en su trabajo [65]. Además, las ideas que proporciona para las pruebas no han sido desacreditadas.

Las únicas cuestiones serias se refieren a las dos aserciones incluidas sin un esquema de prueba. La segunda, que trata del intercambio de una suma y una integral, fue demostrada por Landau. Por tanto, sólo la afirmación (A), relativa al número de ceros de $\Xi(t)$ permaneció (y aún permanece) sin probar.

Hardy [25] fue el primero en probar que hay infinitos ceros reales. Más tarde Selberg [72] probó que hay al menos $CT \log T$ raíces reales. A continuación Levinson [43] estableció que al menos $\frac{1}{3}$ de las raíces de $\Xi(t) = 0$ son reales. Esto ha sido ampliado por Conrey [13], quien ha probado que una fracción de al menos 40.77% de las raíces son reales. Sin embargo, hasta este momento, no hay prueba de la afirmación (A) de Riemann.

Es interesante que las palabras de Riemann (en [65] y [67]) claramente implican que tiene una demostración de (A). Esto contrasta fuertemente con su reconocimiento en [65] de que no tiene una demostración de la Hipótesis de Riemann.

Siegel no encuentra evidencia de que Riemann tuviese una demostración para su afirmación (A). Sin embargo, esto no proporciona una evidencia concluyente puesto que Siegel no encuentra tampoco prueba de ninguna otra de las aserciones de Riemann.

Aquí es apropiado reconocer el trabajo de Neuenschwander [54]. De acuerdo con Neuenschwander, casi toda la correspondencia científica de Riemann se ha perdido. Algunas de sus cartas pueden ser reconstruidas mediante los borradores repartidos en varios trozos de papel entre las (más o menos) 4000 hojas que comprenden su Legado.

Schilling, casado con Ida, la única hija de Riemann, escribe a Weber

«Al principio mamá no podía soportar la idea de que los papeles de Riemann no permanecieran ya en manos privadas; para ella, eran algo sagrado, y no le agradaba pensar que fueran accesibles a cualquier estudiante, quien podría entonces también leer las notas marginales, algunas de las cuales son puramente personales.»

Ésta y otras referencias familiares sugieren que muchos de los documentos personales de Riemann deben haber permanecido en posesión de los familiares de Riemann, pero actualmente se ignora el paradero de estos documentos.

3. LA VERIFICACIÓN NUMÉRICA DE LA HR

3.1. LOS PRIMEROS CEROS

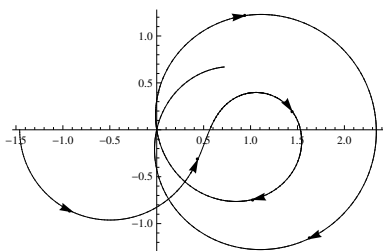


Figura 1: $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ para $0 \leq t \leq 22$.

Con objeto de localizar los primeros ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica $0 < \sigma < 1$, $t \geq 0$, necesitamos ser capaces de calcular $\zeta(s)$ con considerable precisión. Hoy día tales cálculos son mucho más fáciles de realizar que en los días de Gram, Backlund y Hutchinson, quienes, además de Riemann mismo, fueron de los primeros en calcular estos ceros.

Una extensa descripción de los primeros cálculos a mano se encuentra en Gram [23], Backlund [1] y [2], Hutchinson [29], y

Edwards [17]. Incluso antes de la época de Gram, en 1903 se sabía que $\zeta(s)$ tenía infinitos ceros en la banda crítica pero no se sabía mucho más sobre su situación precisa. Por ejemplo, von Mangoldt todavía creía que podría existir un cero con $12 < t < 13$. Ver Narkiewicz [52, p. 189].

Comenzamos nuestra introducción con un enfoque algo intuitivo (haciendo uso de una moderna herramienta computacional: Mathematica).

Todos los trabajos numéricos iniciales sobre $\zeta(s)$ usaron la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2}N^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \sum_{k=1}^m N^{-s-2k+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \prod_{j=0}^{2k-2} (s+j) + \text{Error}, \quad (16)$$

donde los B_{2k} son los números de Bernoulli ($B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...). Para hacer una elección económica de N y m nos basamos en Cohen y Olivier [12]. En vista de la ecuación funcional (5) y $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, podemos restringir la búsqueda de ceros a $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, $t \geq 0$. Puesto que fácilmente vemos que $\zeta(\sigma) < 0$ para $0 < \sigma < 1$, podemos también restringir la búsqueda a $t > 0$.

Para hacer una conjetura informada sobre la situación del primer cero hacemos la siguiente observación: en la integral de contorno $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ podríamos usar la frontera de un rectángulo adecuado sobre el que $\zeta(s)$ no tenga polos ni ceros. No necesitamos calcular esta integral de contorno con gran precisión porque su valor será siempre un entero.

Supongamos que el rectángulo tenga vértices s_1 , s_2 , s_3 y s_4 . En 1903 se sabía que $\zeta(it) \neq 0$ y $\zeta(2+it) \neq 0$ para todo t . De manera que podemos escoger los lados verticales del rectángulo sobre $\sigma = 0$ y $\sigma = 2$.

A continuación debemos escoger los lados horizontales $s_1 \rightarrow s_2$ y $s_3 \rightarrow s_4$. Para encontrar lados horizontales sobre los que $\zeta(s)$ sea grande, primero buscamos un t tal que $|\zeta(2+it)|$ sea grande (ver fig. 2). Hay dos candidatos: $t \simeq 10$ y $t \simeq 18$. (Ya vemos que hay un mínimo local próximo a $t \simeq 14$.) Ahora representamos $|\zeta(\sigma+it)|$ a estas alturas (podemos restringirnos a $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$). Estos dibujos dejan pocas dudas. (Podemos también seguir a Hutchinson [29] para un tratamiento más riguroso.) Así, primero intentamos aproximar $\text{Int} := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ sobre el borde del rectángulo con vértices: $s_1 = -i$, $s_2 = 2-i$, $s_3 = 2+10i$ y $s_4 = 10i$.

Obtenemos en este caso $\text{Int} \simeq -1$, que debe ser a causa del polo simple en $s = 1$ con residuo 1. De manera análoga, entre $t = 10$ y $t = 18$ obtenemos $\text{Int} \simeq 1$.

Usualmente, los ceros $\beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$ con $\gamma > 0$ se ordenan en una sucesión $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ de manera que $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$.

Así que hay precisamente un cero (¡en la línea crítica! puesto que los ceros fuera de la línea de existir son parejas, simétricos respecto de la línea crítica) con $0 < t < 18$.

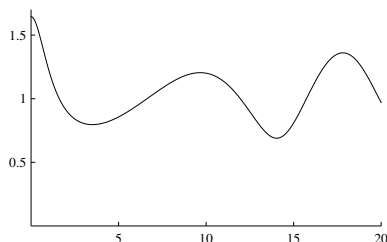


Figura 2: $|\zeta(2+it)|$ para $0 \leq t \leq 20$.

Ahora dibujamos $|\zeta(1/2 + it)|$ para $10 \leq t \leq 18$ para encontrar de forma más precisa la localización de $t = \gamma_1$.

De este modo vemos que $\gamma_1 \simeq 14.1$ (se puede obtener fácilmente mayor precisión). En dibujos semejantes de $|\zeta(1 + it)|$ podemos ya reconocer los ceros $\gamma_2 \simeq 21$, $\gamma_3 \simeq 25$, $\gamma_4 \simeq 30$ y $\gamma_5 \simeq 33$. Volveremos sobre esto en el apartado 3.7 y lo haremos con más precisión utilizando otros medios (más económicos). Los primeros cinco γ_n son:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 14.1347251417\ 3469379045\ 7251983562\ 4702707842\ 5711569924 & (\text{adelantado}) \\ \gamma_2 &= 21.0220396387\ 7155499262\ 8479593896\ 9027773343\ 4052490278 & (\text{atrasado}) \\ \gamma_3 &= 25.0108575801\ 4568876321\ 3790992562\ 8218186595\ 4967255799 & (\text{adelantado}) \\ \gamma_4 &= 30.4248761258\ 5951321031\ 1897530584\ 0913201815\ 6002371544 & (\text{atrasado}) \\ \gamma_5 &= 32.9350615877\ 3918969066\ 2368964074\ 9034888127\ 1560351703 & (\text{adelantado})\end{aligned}$$

(el significado de *adelantado* y *atrasado* se verá luego).

Riemann indicó que todos los ceros están sobre la línea crítica. De manera que uno se concentra en los ceros de $\zeta(1/2 + it)$. Pero ¡también hay que excluir los posibles ceros fuera de la línea crítica!

Que $t = 14.134\dots$ es el primer cero de $\zeta(1/2 + it)$ puede asimismo mostrarse (como de hecho hizo Riemann) usando la fórmula (para más detalles ver Edwards [17, p. 159–160])

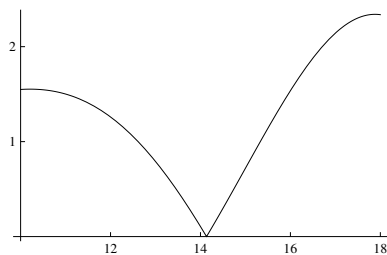


Figura 3: $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ para $10 \leq t \leq 18$.

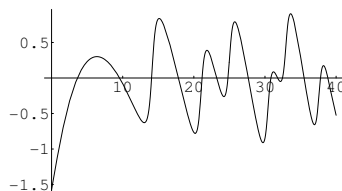


Figura 4: $\arg \zeta(1 + it)$ para $0 \leq t \leq 40$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2 + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\log \pi - \log 2 = 0.023\,095\,708\,966\,121\,033\,81\dots \quad (17)$$

Observamos también que para $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$, donde $0 < a \leq 1$, existe una fórmula de Euler-Maclaurin semejante a (16).

Hay modos alternativos de estimar los primeros pocos ceros. Por ejemplo, notemos la posición de los ceros (subiendo) de $\arg \zeta(1 + it)$. Ver fig. 4.

Continuando como hemos indicado más arriba encontramos fácilmente los primeros 100 ceros (simples) de $\zeta(s)$ (todos en la línea crítica). (Ver en [56] una lista de los primeros 2001 052 ceros con error menor que 3×10^{-9} .)

De acuerdo con Siegel, Riemann aplicó su fórmula asintótica en un extenso cálculo para localizar los primeros pocos ceros (Siegel no es muy preciso, pero parece que Riemann calculó al menos tres ceros).

Tenemos la siguiente tabla sobre la verificación numérica de la HR:

Tabla de verificaciones numéricas de HR		
Año	Investigador	Número de ceros
(1859)	Riemann (usando (12)–(14))	≥ 3
↓	usando Euler-Maclaurin	
(1903)	Gram [22]	15
(1916)	Backlund [1]	79
(1925)	Hutchinson [29]	138
↓	usando Riemann-Siegel	
(1936)	Titchmarsh y Comrie [76]	1 041
(1953)	Turing [79]	1 104
(1956)	Lehmer [42]	25 000
(1958)	Meller [50]	35 337
(1966)	Lehman [40]	250 000
(1969)	Rosser, Yohe, Schoenfeld [69]	3 502 500
(1979)	Brent [7]	81 000 001
(1982)	Brent, van de Lune, te Riele y Winter [9]	200 000 001
(1983)	van de Lune y te Riele [46]	300 000 001
(1986)	van de Lune, te Riele y Winter [49]	1 500 000 001
(2001)	van de Lune (no publicado)	10 000 000 000
(2003)	Wedeniowski (Zeta-grid) [82]	250 000 000 000
Con un nuevo método de Odlyzko y Schönhage [59]		
(2004)	Gourdon [20]	10 000 000 000 000

3.2. LA FÓRMULA DE RIEMANN-SIEGEL

Por medio de la ecuación funcional es posible definir dos funciones *reales y continuas* $\vartheta(t)$ y $Z(t)$, $t \geq 0$, tales que $\zeta(\frac{1}{2} + it) = Z(t)e^{-i\vartheta(t)}$ y $\vartheta(0) = 0$ (ver Edwards [17, p. 119]). De la ecuación funcional se sigue que $\vartheta(t)$ depende sólo de la función Gamma

$$\vartheta(t) := \operatorname{Im} \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \log \pi. \quad (18)$$

La función $\vartheta(t)$ es bastante fácil de calcular [20], mientras que el cálculo de $Z(t)$ es bastante complicado, especialmente en vista de los términos de error inherentes.

La fórmula de Riemann-Siegel para $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ se escribe (para $t > 0$)

$$Z(t) = \sum_{n=1}^m \frac{\cos(\vartheta(t) - t \log n)}{\sqrt{n}} + R_m(t) \quad (19)$$

donde $m = \lfloor \sqrt{t/(2\pi)} \rfloor$ y $R_m(t)$ es una suma complicada de combinaciones lineales de las derivadas de $\Psi(p) = \frac{\cos 2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi p}$ (para conocer más detalles sobre el delicado término de error $R_m(t)$, ver Edwards [17], Gabecke [19] o Cray y Rosser [14]). Una vez que el error $R_m(t)$ ha sido dominado, esta fórmula (de Riemann-Siegel) es bastante

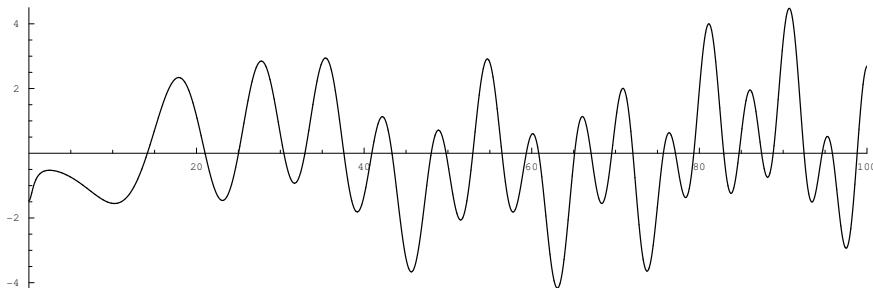


Figura 5: Representación de $Z(t)$ para $0 \leq t \leq 100$.

efectiva (siempre que t no sea demasiado pequeño). De hecho, este método requiere el cálculo de alrededor de $\sqrt{t/(2\pi)}$ términos, mientras que la fórmula de Euler-Maclaurin requiere el cálculo de $O(t)$ términos.

3.3. LA FUNCIÓN $\vartheta(t)$

La ecuación (18) muestra que $\vartheta(t)$ no depende de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, aunque se ha probado (van de Lune, 1996) que también se tiene

$$\vartheta(t) = - \int_0^t \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\frac{1}{2} + iu)}{\zeta(\frac{1}{2} + iu)} du. \quad (20)$$

Generalmente $\vartheta(t)$ se calcula por medio del desarrollo asintótico

$$\vartheta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n-1} - 1)|B_{2n}|}{2^{2n}(2n-1)2n} \frac{1}{t^{2n-1}}, \quad t \rightarrow \infty \quad (21)$$

(para más detalles y su uso práctico ver Edwards [17] o Gabcke [19]). Sin embargo, esta fórmula no es adecuada para valores pequeños de t . De la ecuación funcional (5) y el producto de Weierstrass para $\Gamma(s)$ podemos deducir que, para todo $t \geq 0$,

$$\vartheta(t) = -\left(\gamma + \log \pi + 3 \log 2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{t}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2t}{4k+1} - \arctan \frac{2t}{4k+1} \right) \quad (22)$$

(van de Lune, 1996) que es útil sólo para valores pequeños de t . Es claro por la ecuación (22) que $\vartheta(t)$ es analítica en \mathbb{R} , y, derivando dos veces (22), vemos que $\vartheta(t)$ es una función convexa. De esto se sigue fácilmente que $\vartheta(t)$ es eventualmente *estrictamente creciente* (para $t > 2.28984$). (Utilizando el programa Mathematica podemos usar directamente $\vartheta(t) := \text{RiemannSiegelTheta}[t]$.)

3.4. PUNTOS DE GRAM

En todos los cálculos modernos relativos a la HR juegan un papel importante unos puntos especiales: los puntos de Gram g_k (o $g(k)$). Para un entero $k \geq -1$,

el punto de Gram $t = g_k$ (> 7) se define como la única solución de $\vartheta(t) = k\pi$. (Notemos que el mínimo de $\vartheta(t)$ es $\simeq -3.530\,97$ para $t \simeq 6.289\,84$.) Esta ecuación puede resolverse fácilmente por el método de Newton. La «ley» de Gram (que tiene numerosas excepciones) dice que (a menudo) $(-1)^k Z(g(k)) > 0$. En caso de que $(-1)^k Z(g(k)) > 0$ decimos que el punto de Gram $g(k)$ es bueno; en otro caso, malo. El primer punto de Gram malo es g_{126} con $Z(g_{126}) \simeq -0.027\,63$. En todo el trabajo numérico realizado con $Z(t)$ se observa que $Z(g_k) \neq 0$ para todo k . Así, los puntos de Gram son los puntos (diferentes de los ceros) en los que la órbita de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ corta al eje real.

Resulta útil generalizar la noción de punto de Gram. Para hacerlo recordemos que $\vartheta(t)$ es estrictamente creciente para $t > 6.289\,84\dots$ con $\vartheta(6.289\,84\dots) = -3.530\,97\dots$. Así, también $\frac{1}{\pi}\vartheta(t)$ es estrictamente creciente (y continua) y por tanto tiene una función inversa $g(x)$ para $x > -\frac{1}{\pi}3.530\,97\dots$. Es decir, para x y t apropiados, tenemos $\frac{1}{\pi}\vartheta(g(x)) = x$ (o $\vartheta(g(x)) = \pi x$) y $g(\frac{1}{\pi}\vartheta(t)) = t$. Ahora definimos el índice de Gram de t ($> 6.289\,84\dots$) como la única solución $x = x(t)$ de $g(x) = t$. De esto se sigue claramente que esta solución es igual a $x = x(t) = \frac{1}{\pi}\vartheta(t)$. (Observemos que el índice de Gram del punto $g_k = g(k)$ es k .)

Titchmarsh ha probado que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z(g(2n)) \rightarrow 2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z(g(2n-1)) \rightarrow -2 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \quad (23)$$

De esto se sigue que $Z(t)$ debe tener infinitos ceros (reales). Se nos ocurre que, además de esto, no será difícil probar la siguiente generalización:

$$-1 < x \leq 1 \implies \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z(g(2n+x)) \rightarrow 2 \cos \pi x \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Primeros puntos de Gram					
g_{-1}	=	9.6669080561 3019214126	g_5	=	38.9992099640 2607481744
g_0	=	17.8455995404 1086081682	g_6	=	42.3635503920 5733796940
g_1	=	23.1702827012 4630927899	g_7	=	45.5930289815 0352227397
g_2	=	27.6701822178 1633796093	g_8	=	48.7107766217 9333294037
g_3	=	31.7179799547 6405317955	g_9	=	51.7338428133 4610437069
g_4	=	35.4671842971 0021611605	g_{10}	=	54.6752374468 5325626632

Puede demostrarse que, asintóticamente, $g_k \sim 2\pi \frac{k}{\log k}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Los puntos de Gram malos con índice ≤ 500 son g_{126} , g_{134} , g_{195} , g_{211} , g_{232} , g_{254} , g_{288} , g_{367} , g_{377} , g_{379} , g_{397} , g_{400} , g_{461} .

De acuerdo con la ley de Gram deberíamos tener $g(k-2) < \gamma_k < g(k-1)$. Por esto, podemos decir que la «localización ideal de γ_k » es $g(k - \frac{3}{2})$. La distribución de los γ_k alrededor de los puntos $g(k - \frac{3}{2})$ parece ser Gaussiana. En relación con esto introducimos el concepto de ceros *adelantados/atrasados*: diremos que un cero $\frac{1}{2} + i\gamma_k$ está «adelantado» si $\gamma_k < g(k - \frac{3}{2})$ y «atrasado» en otro caso. No hemos

observado nunca que un cero sea «puntual». De los primeros cinco ceros mostrados en el apartado 3.1 el primero, tercero y quinto están adelantados, mientras que el segundo y cuarto están atrasados.

La frecuencia de los puntos de Gram malos aparentemente crece al crecer k . Experimentalmente encontramos que, para distintos valores de k , estas frecuencias son

$$\begin{array}{l|l|l} 6.25 \% \text{ para } k \sim 10^3 & 13.99 \% \text{ para } k \sim 10^6 & 17.52 \% \text{ para } k \sim 10^9 \\ 9.90 \% \text{ para } k \sim 10^4 & 15.37 \% \text{ para } k \sim 10^7 & 19.25 \% \text{ para } k \sim 10^{10} \\ 12.62 \% \text{ para } k \sim 10^5 & 16.06 \% \text{ para } k \sim 10^8 & \end{array}$$

Selberg ha probado [72] que hay (al menos) una proporción positiva de fallos de la ley de Gram.

3.5. NOTA (EN PARTE HEURÍSTICA) SOBRE LA SITUACIÓN EXACTA DE LOS γ_n

Cuando representamos la órbita de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ (ver fig. 1) observamos, por ejemplo, que para $t > 3$ esta órbita es *convexa a la derecha*. No hemos observado ninguna excepción a esta «regla». (Puede probarse que este comportamiento se sigue de la HR.) Además, hasta ahora todos los cálculos indican que $\zeta'(\frac{1}{2} + it) \neq 0$ para todo t real. (En la línea crítica, $\zeta'(s)$ puede anularse sólo en un cero de $\zeta(s)$. Ver Titchmarsh [77, p. 381].) Así, parece que todos los ceros de $\zeta(s)$ son simples.

Basándonos en estos dos ingredientes podemos calcular $\lim_{t \uparrow \gamma_1} \arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ de dos maneras distintas, resultando que (notamos que la tangente a la órbita de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ y el vector $\zeta'(\frac{1}{2} + it)$ son siempre perpendiculares)

$$\pi - \vartheta(\gamma_1) = \lim_{t \uparrow \gamma_1} \arg \zeta(\frac{1}{2} + it) = \arg \zeta'(\frac{1}{2} + i\gamma_1) + \frac{\pi}{2} + \pi \quad (25)$$

de manera que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta(\gamma_1) + \arg \zeta'(\frac{1}{2} + i\gamma_1)) = 1. \quad (26)$$

Un razonamiento semejante revela que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta(\gamma_n) + \arg \zeta'(\frac{1}{2} + i\gamma_n)) = n. \quad (27)$$

Esta observación lleva nuestra atención a la función (van de Lune, 1997)

$$\kappa(t) := \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} (\vartheta(t) + \arg \zeta'(\frac{1}{2} + it)), \quad (28)$$

donde $\vartheta(t)$ y $\arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ son continuas con $\vartheta(0) = 0$ y $\arg \zeta'(1/2) = \pi$.

De este modo encontramos (suponiendo HR) que $t = \gamma_n$ es la única solución de la ecuación $\kappa(t) = n$.

Observamos que $\arg \zeta'(\frac{1}{2} + it)$ es decreciente para $t > 2.756\,488\,386\,389\,62\dots$, que es equivalente a la convexidad a la derecha de la órbita de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$. También observamos que la velocidad de decrecimiento supera consistentemente la velocidad

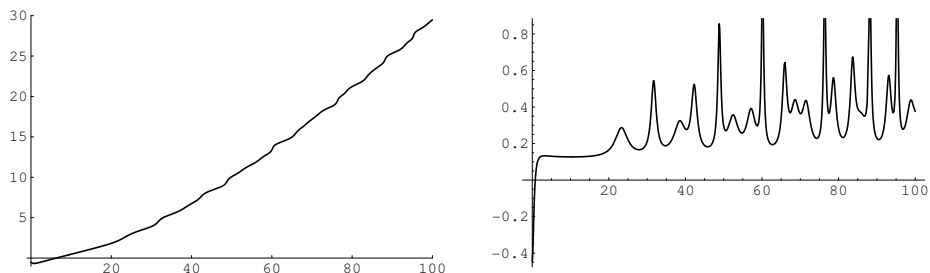


Figura 6: $\kappa(t)$ para $0 \leq t \leq 100$ (izquierda) y $\kappa'(t)$ para $0 \leq t \leq 100$ (derecha).

de incremento de $\vartheta(t)$, de tal forma que $\kappa(t)$ es estrictamente creciente para $t > 0.78$, digamos, con $\kappa'(t) > 0$. Podemos comprobar que $\kappa(6.289\,835\,988\dots) = 0$.

Puesto que $\kappa(t)$ es estrictamente creciente, tiene una función inversa $\gamma(u)$, que cumple $\kappa(\gamma(u)) = u$, para $u > -0.670\,259\,798\,7\dots$. Se suele expresar diciendo que de este modo hemos obtenido una *linealización de los γ_n* . Esto es, $\gamma(n) = \gamma_n$. Podemos probar que $Z'(t) = 0$ si y sólo si $t = \gamma(n - \frac{1}{2})$, de manera que también los máximos y mínimos locales de $Z(t)$ están *linealizados*. Si un mínimo (resp. máximo) local de $Z(t)$ fuera > 0 (resp. < 0) entonces se contradiría la HR.

Derivando (28) e integrando de nuevo encontramos la notable fórmula (puede probarse que el integrando es continuo)

$$\kappa(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\frac{1}{2} + iu)}{\zeta(\frac{1}{2} + iu)} - \frac{\zeta''(\frac{1}{2} + iu)}{\zeta'(\frac{1}{2} + iu)} \right) du. \quad (29)$$

La derivada

$$\kappa'(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\frac{1}{2} + it)}{\zeta(\frac{1}{2} + it)} - \frac{\zeta''(\frac{1}{2} + it)}{\zeta'(\frac{1}{2} + it)} \right) \quad (30)$$

parece ser positiva para $t > 0.779\,853\,575\,3\dots$, y muestra una «tendencia a ser creciente». Ver fig. 6.

No hay que decir que $\kappa'(t)$ ¡será bastante grande junto a ceros próximos! Por ejemplo: $\kappa'(17\,143.804\,216\,267\,293) \simeq 519.27$ y

$$\kappa'(1\,239\,587\,702.547\,487\,092\,560\,555) \simeq \frac{1}{\pi} 154\,818\,579.027\,278\,937\,671 > 49 \times 10^6.$$

Puede probarse que $\kappa'(\gamma_n) = \frac{1}{\pi} \vartheta'(\gamma_n) \simeq \frac{1}{2} \log \frac{\gamma_n}{2\pi}$, que es de «tamaño muy moderado».

3.6. BLOQUES DE ROSSER

En cualquier comprobación sistemática moderna de la HR juegan también un papel prominente los *Bloques de Rosser*.³ Un bloque de Rosser (de longitud L) es

³A veces llamados bloques de Gram. Fueron introducidos por Rosser et al. [69].

un intervalo $[g_k, g_{k+1}, \dots, g_{k+L})$ donde los puntos de los extremos g_k y g_{k+L} son puntos de Gram buenos y los del interior $g_{k+1}, \dots, g_{k+L-1}$ puntos de Gram malos. Este bloque se denota por B_k (o mejor $B_{k,L}$). Notemos que un bloque de Rosser de longitud $L = 1$ es simplemente un intervalo de Gram bueno.

Un bloque de Rosser de longitud L se dice bueno si contiene *al menos* L ceros de $Z(t)$. En otro caso se dice malo.

La regla de Rosser (de la que existen infinitas excepciones) dice: «Todos los bloques de Rosser son buenos.»

Presentamos algunos ejemplos de las primeras apariciones de bloques de Rosser:

$L = 2$ comienza en $n = 125$	$L = 6$ comienza en $n = 1\,181\,229$
$L = 3$ comienza en $n = 2\,144$	$L = 7$ comienza en $n = 13\,869\,654$
$L = 4$ comienza en $n = 18\,243$	$L = 8$ comienza en $n = 112\,154\,948$
$L = 5$ comienza en $n = 68\,084$	$L = 9$ comienza en $n = 542\,964\,969$

El mayor bloque de Rosser encontrado hasta hoy es $L = 13$ (ver Gourdon [20] y [21]). El esquema de ceros de un bloque de Rosser es la sucesión finita de enteros que cuentan el número de ceros de $Z(t)$ en cada intervalo de Gram del bloque y sus vecinos relevantes. Ponemos entre paréntesis los enteros correspondientes al bloque de Rosser. Usando esta notación, la primera violación de la regla de Rosser ocurre en $n = 13\,999\,525$, con $L = 2$ y esquema de ceros $(00)3$.

3.7. SEPARACIÓN SISTEMÁTICA DE LOS CEROS EN LA BANDA CRÍTICA

En la práctica, la verificación numérica de la HR en un rango dado de la banda crítica consiste en *separar* los ceros de $Z(t)$, o, equivalentemente, encontrar suficientes cambios de signo de $Z(t)$. Por tanto, ¡su objetivo *no* es calcular los ceros de $Z(t)$ con cierto grado de precisión! Notemos de antemano que no se ha observado que se tenga $Z(g(n)) = 0$ para ningún $n \geq -1$.

Los principales pasos de la estrategia en el proceso de separación son (brevemente):

- (0) observar que el primer punto de Gram $g(-1)$ es bueno;
- (1) calcular $Z(t)$ en el siguiente punto de Gram;
- (2) mientras que este (siguiente) punto de Gram sea bueno, hemos detectado de hecho (al menos) un cero (= cambio de signo), y continuamos con el siguiente punto de Gram;
- (3) en cuanto detectamos un punto de Gram malo $g(n+1)$ se inicia un bloque de Rosser $B_{n,L} := [g(n), g(n+1), \dots, g(n+L-1), g(n+L))$ de longitud $L \geq 2$;
- (4) en un bloque $B_{n,L}$ implícitamente hemos detectado ya $L - 2$ ceros (en el intervalo $[g(n+1), \dots, g(n+L-1))$);
- (5) así que «faltan dos ceros»;
- (6) ahora buscamos los «dos que faltan»:

- (6a) primero buscamos, dentro del bloque de Rosser, un (= uno) cambio de signo «extra»,
- (6b) si lo encontramos, el bloque es bueno y seguimos con el siguiente punto de Gram $g(n + L + 1)$,
- (6c) si no tenemos éxito buscando los «dos que faltan», buscamos en uno o más bloques de Rosser vecinos,
- (6d) si todavía no tenemos éxito: imprimir un mensaje adecuado y continuar, simplemente fingiendo (!) que hemos encontrado los «dos que faltan» (tales bloques de Rosser «traviesos» serán examinados más tarde «a mano»);
- (7) continuamos con el cálculo de $Z(g(n + L + 1))$ y repetimos el procedimiento de separación esquematizado arriba.

Un ingrediente esencial en la estrategia anterior es un procedimiento que nos garantice el signo de $Z(t)$. Esto requiere un riguroso análisis de las fórmulas de Riemann-Siegel y Euler-Maclaurin. Un programa FORTRAN completamente detallado del procedimiento esquematizado más arriba podemos encontrarlo en van de Lune, te Riele y Winter [45] o [48].

Hasta ahora, esta estrategia no ha fallado nunca. El primer ejemplo de un bloque de Rosser malo fue encontrado por Brent: en $n = 13\,999\,525$ con longitud 2 (esquema de ceros (00)3).

Una separación termina generalmente aplicando el siguiente

TEOREMA (Brent [7, Theorem 3.2]). *Sea el intervalo $[g(n), g(p))$ unión de K bloques de Rosser buenos consecutivos con*

$$K \geq 0.0061 \log^2 g(p) + 0.08 \log g(p). \quad (31)$$

Entonces $N(g(n)) \leq n + 1$ y $N(g(p)) \geq p + 1$, donde $N(T)$ denota el número total de ceros $\sigma + it$ en la banda crítica con $0 \leq t \leq T$.

El cálculo sistemático detallado en el esquema (1)–(7) anterior tiene como propósito establecer $N(g(n)) \geq n + 1$. Así, si el teorema de Brent se aplica, entonces la conclusión será que $N(g(n)) = n + 1$ y que *no* ha sido detectada ninguna violación de HR.

De este modo, actualmente sabemos que los primeros 10^{13} ceros no triviales están en la línea crítica y son simples. Ver la tabla de verificación numérica de HR al final del apartado 3.1.

Todos los cálculos hasta ahora han mostrado que los bloques de Rosser «traviesos» del ítem (6d) ocurren muy rara vez. Brent informa de sólo 15 bloques «traviesos» en el intervalo $0 < t < 32\,585\,736$. No parece haber una regla general que prediga dónde se sitúan los «dos que faltan».

Presentamos unos pocos ejemplos interesantes. En la figura 7 consideramos, para $n = 1\,048\,449\,112$, el bloque de Rosser

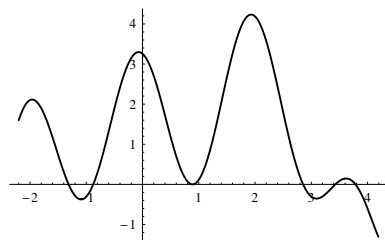


Figura 7: $Z(g(n+t))$ para $-2 \leq t \leq 4$.

$B_{n,2} = [g(n), g(n+2))$. En este caso los «dos que faltan» (dos ceros muy próximos) están situados en el intervalo de Gram (malo) $[g(n), g(n+1))$. De hecho, podemos comprobar que $Z(g(n+0.888\,964\,15)) \simeq -0.000\,000\,221\,8$. Así que este bloque de Rosser resulta ser un bloque bueno con esquema de ceros (20).

En la figura 8 consideramos para $n = 30\,930\,927$ el bloque de Rosser $B_{n,2} = [g(n), g(n+2))$. En este caso los «dos que faltan» (dos ceros extra) están situados en el intervalo de Gram (bueno) $[g(n-1), g(n))$. Así, este $B_{n,2}$ resulta ser un bloque de Rosser malo con esquema de ceros 3(00).

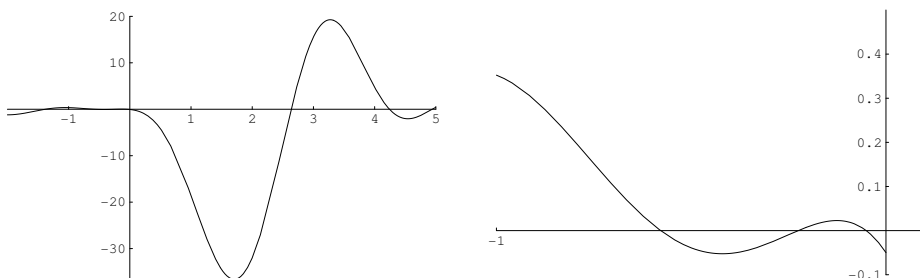


Figura 8: $Z(g(n+t))$ para $-2 \leq t \leq 5$ (izquierda) y detalle en $-1 \leq t \leq 0$ (derecha).

En la figura 9 tomamos $n = 61\,331\,766$ y consideramos el intervalo $[g(n), g(n+4))$. Consiste en dos bloques de Rosser adyacentes $B_{n,2} = [g(n), g(n+2))$ y $B_{n+2,2} = [g(n+2), g(n+4))$. En esa figura vemos que los «dos que faltan» relativos a $B_{n,2}$ y también para $B_{n+2,2}$ están simultáneamente situados en el intervalo de Gram (malo) $[g(n+2), g(n+3))$, ¡que contiene 4 ceros! De manera que $B_{n,2}$ es un bloque de Rosser malo mientras que $B_{n+2,2}$ es bueno. Los esquemas de ceros son (00)4 y (40), respectivamente.

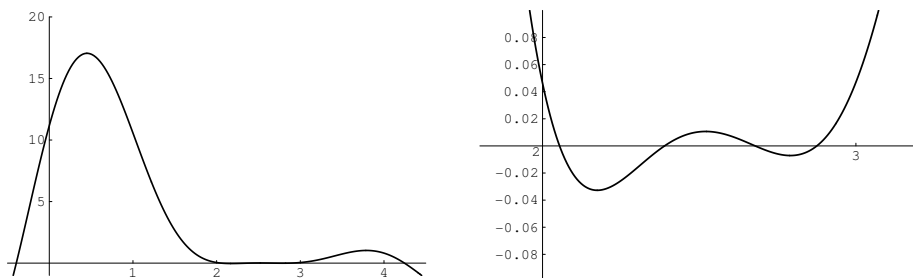


Figura 9: $Z(g(n+t))$ para $0 \leq t \leq 4$ (izquierda) y detalle en $2 \leq t \leq 3$ (derecha).

En Gourdon [20, p. 37] el lector puede encontrar un ejemplo semejante en el cual hay 5 raíces en un mismo intervalo de Gram (bueno).

4. «EQUIVALENTES» A LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

Fruto los esfuerzos realizados para tratar de probar la Hipótesis de Riemann, en numerosos ocasiones han aparecido condiciones que son equivalentes a ella. Aunque de momento ninguna de tales condiciones ha sido probada ni refutada, y por tanto no han servido para decidir sobre la veracidad de la HR, son caminos alternativos, algunos de los cuales continúan siendo explorados. Mostramos a continuación —de una manera bastante esquemática— varias de estas condiciones equivalentes.

En Titchmarsh [77, chapter XIV] se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la HR: las condiciones de Riesz y las de Hardy y Littlewood. Posteriormente fueron generalizadas por Brent [8]. La condición suficiente de Turán dice: Si para todo $N \in \mathbb{N}$ las sumas $\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s}$ no tienen ceros con $\sigma > 1$ entonces HR es verdadera. Desgraciadamente esta condición no es verdadera. Mencionamos sólo un contraejemplo: $\zeta_{23}(1.008\,496\,93\dots + i\,8\,645.524\,423\,32\dots) = 0$. Para más información remitimos a Spira [74, 75], van de Lune y te Riele [47], y Montgomery [51].

Hay también una condición necesaria y suficiente relacionada con las sucesiones de Farey. Los detalles pueden verse en el tratado de Landau [38, II, p. 167–177].

La condición suficiente de Mertens dice: $M(x) \leq \sqrt{x}$ para todo $x \geq 1$. Aquí $M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n)$, donde $\mu(n)$ es la función de Möbius. Sin embargo, en 1985, Odlyzko y te Riele [58] probaron que la «conjetura de Mertens» no es verdadera. Después de que te Riele y Odlyzko refutaran la hipótesis de Mertens, Pintz [62] fue el primero en mostrar que, de hecho, la primera violación sucede antes de $x = \exp(3.22 \times 10^{64})$. Esta cota fue mejorada por Kotnik y van de Lune [36] a $x = \exp(1.59 \times 10^{40})$. Algunos cálculos numéricos de Kotnik y van de Lune [33] indican que el primer x con $M(x) > \sqrt{x}$ puede muy bien ser $> 10^{2 \times 10^{23}}$.

La hipótesis de Lindelöf: $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Esta estimación se sigue de la HR; sin embargo, el recíproco no es cierto.

Más recientemente se han presentado algunas otras condiciones necesarias y suficientes para HR (ver también Bruinier [10]):

(1984) Condición de Robin [68]: $\sigma(n) < e^\gamma n \log \log n$ para todo $n \geq 5041$, donde $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$, y γ es la constante de Euler.

(2000) Condición de Lagarias [37]: $\sigma(n) \leq h(n) + e^{h(n)} \log h(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $h(n) := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

No se han encontrado contraejemplos a estas condiciones.

(1983) Condición de Nicolas [55]: $\frac{N_k}{\varphi(N_k)} > e^\gamma \log \log N_k$, donde $\varphi(\cdot)$ es la función indicador de Euler (totient), y N_k es el producto de los k primeros primos.

Esta condición se puede escribir también en la forma

$$\Delta(k) := - \sum_{j=1}^k \log \left(1 - \frac{1}{p_j} \right) - \gamma - \log \log \sum_{j=1}^k \log p_j > 0. \quad (32)$$

Cálculos numéricos de Kotnik y van de Lune [34], han mostrado que para todo $2 \leq k \leq 10^{13}$ se tiene de hecho la desigualdad más precisa $\Delta(k) > \frac{1}{k}$. También

observan que para $k \geq 5$ se cumple incluso $\Delta(k) > \frac{1}{\sqrt{k}(\log k)^2}$. Por tanto, hasta ahora el criterio de Nicolas se satisface con amplitud.

(1992) Keiper [32] prueba que, si la HR es verdadera, entonces

$$\lambda_n := \frac{1}{n} \sum_{\varrho} (1 - (1 - \varrho^{-1})^n) > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad (33)$$

donde, en el sumatorio, ϱ recorre los ceros complejos de la función zeta. Li demuestra que la condición de Keiper es también suficiente, obteniendo la siguiente equivalencia.

(1997) Condición de Li [44]: Los números $\lambda_n := \sum_{\varrho} (1 - (1 - \varrho^{-1})^n)$ son positivos para todo $n \geq 1$.

Respecto al criterio de Li, remitimos al lector a Li [44], Biane, Pitman y Yor [4], y Oesterlé [60]. Notemos que Bombieri y Lagarias [6] han probado que el criterio de Li es un caso especial de un teorema mucho más general. También se sabe que si los primeros N ceros de $\zeta(s)$ están en la línea crítica, entonces el criterio de Li se satisface para todo $n \leq N^2$. Ver [60].

Mencionamos asimismo la siguiente condición suficiente (van de Lune, 2003): Si, para cada $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n \leq N} \left(|\mu(n)| - \frac{6}{\pi^2} \right) = O(N^{1/4+\epsilon}), \quad (34)$$

entonces la HR es verdadera. (En este contexto notemos que $\sum_{n \leq N} |\mu(n)|$ puede ser calculado muy rápidamente por medio de la criba mencionada en el apartado 1.1.) Cálculos numéricos (de Kotnik y van de Lune) para $N \leq 35 \times 10^{13}$ indican que $\sum_{n \leq N} (|\mu(n)| - 6/\pi^2) = O(N^{1/4} \log N)$. Con más precisión, para todo $N \leq 35 \times 10^{13}$ encontraron que $|\sum_{n \leq N} (|\mu(n)| - 6/\pi^2)| < 1.126 \times N^{1/4}$. Notemos también que esta condición suficiente puede ser generalizada considerablemente.

Para finalizar, queremos citar la condición de Báez-Duarte [3], y el hecho de que HR es equivalente a que la constante de Bruijn-Newman es ≤ 0 . Ver Wolf [83]. Respecto a la constante de Bruijn-Newman, ver Odlyzko [57].

AGRADECIMIENTOS. Expresamos nuestro agradecimiento a Tadej Kotnik (Ljubljana, Eslovenia) y a Herman J. J. te Riele (CWI, Amsterdam, Holanda) por sus valiosos comentarios críticos de una primera versión de este trabajo. También agradecemos a Foster Dieckhoff (Kansas City, Missouri, EE UU) por su interés en el tema y sus sugerencias para mejorar nuestra exposición.

REFERENCIAS

- [1] R. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannsche Zetafunktion*, Dissertation, Helsingfors, 1916.
- [2] R. BACKLUND, *Über die Nullstellen der Riemannsche Zetafunktion*, Acta Math. **41** (1918), 345–375.

- [3] L. BÁEZ-DUARTE, *A sequential Riesz-like criterion for the Riemann hypothesis*, Int. J. Math. Math. Sci. **21** (2005), 3527–3537.
- [4] P. BIANE, J. PITMAN Y M. YOR, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), 435–465.
- [5] E. BOMBIERI, *Problems of the Millenium: The Riemann Hypothesis*, http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Official_Problem_Description.pdf
- [6] E. BOMBIERI Y J. C. LAGARIAS, *Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis*, J. Number Theory **77** (1999), 274–287.
- [7] R. P. BRENT, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip*, Math. Comp. **33** (1979), 1361–1372.
- [8] R. P. BRENT, *Some Real-Variable Conditions Equivalent to the Riemann Hypothesis*, Presentado en el CWI para Herman te Riele con ocasión de su 25 aniversario (1995), 1–38.
- [9] R. P. BRENT, J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE Y D. T. WINTER, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip II*, Math. Comp. **39** (1982), 681–688. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/10742/10742A.pdf>
- [10] J. H. BRUINIER, *Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung*, Math. Semesterber **48** (2001), 79–92.
- [11] P. CHEBYSHEV, *Oeuvres*, Vol. I, II, St. Petersburg. Reimpreso por Chelsea, Bronx, New York, 1962.
- [12] H. COHEN Y M. OLIVIER, *Calcul des valeurs de la fonction zêta de Riemann en multiprécision*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 427–430.
- [13] J. B. CONREY, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1–26.
- [14] F. D. CRARY Y J. B. ROSSER, *High precision coefficients related to the zeta function*, MRC Technical Summary Report # 1344, Univ. of Wisconsin, Madison, 1975.
- [15] R. DEDEKIND, *Bernhard Riemann's Lebenslauf*, en [66], pp. 507–526.
- [16] J. DERBYSHIRE, *Prime obsession. Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in mathematics*, Joseph Henry Press, Washington, DC, 2003.
- [17] H. M. EDWARDS, *Riemann's zeta function*. Reimpresión del original de 1974 [Academic Press, New York]. Dover Publications, Mineola, NY, 2001.
- [18] L. EULER, *Variae observationes circa series infinitas*, presentado a la Academia de San Petersburgo el 25 de abril de 1737. Índice Enestrom E72. El original (en latín) puede obtenerse vía <http://math.dartmouth.edu/~euler/>. También podemos encontrar una traducción al inglés.
- [19] W. GABCKE, *Neue Herleitung und explizite Restabschätzung der Riemann-Siegel-Formel*, Dissertation, Göttingen, 1979.
- [20] X. GOURDON, *The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height*, <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>

- [21] X. GOURDON Y P. SEBAH, <http://numbers.computation.free.fr/>
- [22] J. P. GRAM, *Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Bull. de l'Academie de Copenhague (1895), 303.
- [23] J. P. GRAM, *Note sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Acta Math. 27 (1903), 289–304.
- [24] J. HADAMARD, *Étude sur les Propriétés des Fonctions Entières et en Particulier d'une Fonction Considérée par Riemann*, J. Math. Pures Appl. (4) **9** (1893), 171–215. (También en las Obras de Hadamard.)
- [25] G. H. HARDY, *Sur les Zeros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012–1014. (También en las obras completas de Hardy.)
- [26] G. H. HARDY Y J. E. LITTLEWOOD, *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Math. Z. **10** (1921), 283–317. (También en las obras completas de Hardy.)
- [27] C. B. HASELGROVE Y J. C. P. MILLER, *Tables of the Riemann zeta function*, Royal Society Mathematical Tables, Vol. 6, Cambridge University Press, New York, 1960.
- [28] D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, conferencia impartida en el International Congress of Mathematicians de París en 1900. Traducción al inglés en *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 407–436.
- [29] J. I. HUTCHINSON, *On the roots of the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 49–60.
- [30] A. E. INGHAM, *The distribution of prime numbers*. Reimpresión del original de 1932. With a foreword by R. C. Vaughan. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [31] A. IVIĆ, *The Riemann zeta-function. Theory and applications*, Reimpresión del original de 1985 [Wiley, New York]. Dover Publications, Mineola, NY, 2003.
- [32] J. B. KEIPER, *Power series expansions of Riemann's ξ function*, Math. Comp. **58** (1992), 765–773.
- [33] T. KOTNIK Y J. VAN DE LUNE, *On the order of the Mertens function*, Exper. Math. **13** (2004), 473–481.
- [34] T. KOTNIK Y J. VAN DE LUNE, *A computational study of the Nicolas inequality equivalent to the Riemann Hypothesis* (no publicado).
- [35] T. KOTNIK Y J. VAN DE LUNE, *Further systematic computations on the summatory function of the Möbius function*, Report MAS-R0313, CWI, Amsterdam (2003), iii+9 pp. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/4116/04116D.pdf>
- [36] T. KOTNIK Y H. J. J. TE RIELE, *The Mertens conjecture revisited*, Lecture Notes in Computer Science **4076** (2006), 156–167.
- [37] J. C. LAGARIAS, *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 534–543. [arXiv:math.NT/0008177](https://arxiv.org/abs/math.NT/0008177).
- [38] E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Vol I, II, 2nd ed., con un apéndice de Paul T. Bateman. Chelsea Publishing Co., New York, 1953.

- [39] D. LAUGWITZ, *Bernhard Riemann 1826–1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, translated from German by A. Shenitzer, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [40] R. S. LEHMAN, *Separation of zeros of the Riemann zeta-function*, Math. Comp. **20** (1966), 523–541.
- [41] D. H. LEHMER, *On the roots of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **95** (1956), 291–298.
- [42] D. H. LEHMER, *Extended computation of the Riemann zeta-function*, Mathematika **3** (1956), 102–108.
- [43] N. LEVINSON, *More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Advances in Math. **13** (1974), 383–436.
- [44] XIAN-JIN LI, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis*, J. Number Theory **65** (1997), 325–333.
- [45] J. VAN DE LUNE Y H. J. J. TE RIELE, *Rigorous high speed separation of zeros of Riemann's zeta function, II*, Department of Numerical Mathematics, Report 26/82, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1982, ii+26 pp. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/9107/9107A.pdf>
- [46] J. VAN DE LUNE Y H. J. J. TE RIELE, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. III*, Math. Comp. **41** (1983), 759–767. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/1869/1869A.pdf>
- [47] J. VAN DE LUNE Y H. J. J. TE RIELE, *Numerical computation of special zeros of partial sums of Riemann's zeta function*, Mathematical Centre Tracts, Nr. 155 (edited by H. W. Lenstra, jr, and R. Tijdeman), Computational methods in number theory, Part II (1982), 371–387.
- [48] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE Y D. T. WINTER, *Rigorous high speed separation of zeros of Riemann's zeta function*, Department of Numerical Mathematics, Report 113/81. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981, ii+35 pp. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/8955/8955A.pdf>
- [49] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE Y D. T. WINTER, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV*, Math. Comp. **46** (1986), 667–681. <http://oai.cwi.nl/oai/asset/1808/1808A.pdf>
- [50] N. A. MELLER, *Computations connected with the check of Riemann's hypothesis* (en ruso), Dokl. Akad. Nauk SSSR **123** (1958), 246–248.
- [51] H. L. MONTGOMERY, *Zeros of approximations to the zeta function*, Studies in pure mathematics, Birkhäuser, Basel (1983), 497–506.
- [52] W. NARKIEWICZ, *The development of prime number theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [53] E. NEUENSCHWANDER, *Studies in the History of Complex Function Theory II: Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 87–105.

- [54] E. NEUENSCHWANDER, *A brief Report on a Number of Recently Discovered Sets of Notes on Riemann's Lectures and on the Transmission of the Riemann Nachlass*, *Historia Mathematica* **15** (1988), 101–113.
- [55] J. NICOLAS, *Petites valeurs de la fonction d'Euler*, *J. Number Theory* **17** (1983), 375–388.
- [56] A. M. ODLYZKO, <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/> (contiene también una lista de ceros de $\zeta(s)$).
- [57] A. M. ODLYZKO, *An improved bound for the de Bruijn-Newman constant*, *Mathematical journey through analysis, matrix theory and scientific computation* (Kent, OH, 1999), *Numer. Algorithms* **25** (2000), 293–303.
- [58] A. M. ODLYZKO Y H. J. J. TE RIELE, *Disproof of the Mertens conjecture*, *J. Reine Angew. Math.* **357** (1985), 138–160.
- [59] A. M. ODLYZKO Y A. SCHÖNHAGE, *Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), 797–809.
- [60] J. OESTERLÉ, *Ver* [4, p. 441].
- [61] S. J. PATTERSON, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [62] J. PINTZ, *An effective disproof of the Mertens conjecture*, *Astérisque* **147–148** (1987), 325–333.
- [63] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Reprint of the 1957 original. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 91, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [64] J. QUER, *La funció ζ de Riemann*, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **22** (2007), 197–228. <http://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000044%5C00000074.pdf>
- [65] B. RIEMANN, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, *Monatsber. Akad. Berlin* (1859), 671–680. (También en las obras completas de Riemann [66].)
- [66] B. RIEMANN, *Bernhard Riemann. Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Based on the edition by Heinrich Weber and Richard Dedekind. Edited and with a preface by Raghavan Narasimhan. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig; Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [67] B. RIEMANN, *Entwurf eines Briefes von B. Riemann an K. Weierstraß (26. Oktober 1859)*, contenido en [66], pp. 822–825.
- [68] G. ROBIN, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann*, *J. Math. Pures Appl.* (9) **63** (1984), 187–213.
- [69] J. B. ROSSER, J. M. YOHE Y L. SCHOENFELD, *Rigorous computation and the zeros of the Riemann zeta-function. (With discussion)*, 1969 Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968), Vol. 1: Mathematics, Software, pp. 70–76, North-Holland, Amsterdam.
- [70] K. SABBAGH, *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Farrar, Strauss and Giroux, 19 Union Square West, New York, 2002.

- [71] M. DU SAUTOY, *The Music of the Primes (Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters)*, Fourth Estate, London, 2003. Traducido a español como *La música de los números primos*, Acantilado, 2007.
- [72] A. SELBERG, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I (1942), no. 10, 59 pp.
- [73] C. L. SIEGEL, *Über Riemann's Nachlass zur Analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. Phys. **2** (1932), 45–80. Reprinted in C. L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen* 1966, Vol. 1, pp. 275–310.
- [74] R. SPIRA, *Zeros of sections of the zeta function. I*, Math. Comp. **20** (1966), 542–550.
- [75] R. SPIRA, *Zeros of sections of the zeta function. II*, Math. Comp. **22** (1968), 163–173.
- [76] E. C. TITCHMARSH, *The zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Roy. Soc. London **151** (1935), 234–255, and **157** (1936), 261–263.
- [77] E. C. TITCHMARSH, *The theory of the Riemann zeta-function*, Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [78] A. M. TURING, *A method for the calculation of the zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) **48** (1943), 180–197.
- [79] A. M. TURING, *Some calculations of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (3) **3** (1953), 99–117.
- [80] C. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres (première partie)*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles [I] (1896), 183–256.
- [81] S. WAGON, *The Evidence*, Math. Intelligencer **8** (1986), no. 3, 57–62.
- [82] S. WEDENIWSKI, <http://www.zetagrid.net/>
- [83] M. WOLF, *Evidence in favor of the Baez-Duarte criterion for the Riemann Hypothesis*, Comp. Methods Sci. Techn. **14** (2008), 47–54.
- [84] D. ZAGIER, *The First 50 Million Prime Numbers*, Math. Intelligencer **0** (1977), 7–19.

J. ARIAS DE REYNA, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, APDO. DE CORREOS 1160, 41080-SEVILLA, ESPAÑA
 Correo electrónico: arias@us.es

J. VAN DE LUNE, LANGEBUORREN 49, 9074 CH HALLUM, HOLANDA (PREVIAMENTE EN CWI, AMSTERDAM)
 Correo electrónico: j.vandelune@hccnet.nl